TESIS - SM 142501

TRANSFORMASI WAVELET KONTINU PADA RUANG $L^p(\mathbb{R}^n)$ DENGAN FAKTOR DILASI VEKTOR

RIZKY DARMAWAN
NRP 1213201052

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

THESIS - SM 142501

CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM ON $L^p(\mathbb{R}^n)$ SPACE WITH VECTOR DILATION

RIZKY DARMAWAN
NRP 1213201052

Supervisior:
Dr. Mahmud Yunus, M.Si.

MAGISTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTEMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

TRANSFORMASI WAVELET KONTINU PADA RUANG $L^p(\mathbb{R}^n)$
DENGAN FAKTOR DILASI VEKTOR

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
RIZKY DARMAWAN
NRP. 12132010 52

Tanggal Ujian : 19 Mei 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :

Dr. Mahmud Yunus, M.Si. (Pembimbing)
NIP. 19620407 198703 1 005

Dr. Subiono, M.Si. (Penguji)
NIP. 19570411 198404 1 001

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si (Penguji)
NIP. 19660414 199102 2 001

Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT. (Penguji)
NIP. 19690405 199403 2 003

Direktur Program Pascasarjana

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

LEMBAR PERNYATAAN
PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya

Nama : Rizky Darmawan
NRP : 1213201052
Jurusan/Fakultas : Matematika/Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Alamat kontak : Banyu Urip Kidul 6f/33 Surabaya
a. Email : rizky.d76@gmail.com
b. Telp/HP : 085645522085

Menyatakan bahwa semua data yang saya *upload* di Digilib Library ITS merupakan hasil final (revisi terakhir) dari karya ilmiah saya yang sudah disahkan oleh dosen penguji. Apabila dikemudian hari ditemukan ada ketidaksesuaian dengan kenyataan, maka saya bersedia menerima sanksi

Demi perkembangan ilmu pengetahuan, saya menyetujui untuk memberikan **Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif (*Non-Exclusive Royalti Free Right*)** kepada Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya atas karya ilmiah saya yang berjudul :

TRANSFORMASI WAVELET KONTINU PADA RUANG $L^p(\mathbb{R}^n)$ DENGAN FAKTOR DILASI VEKTOR

Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media formatkan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (*database*), mendistribusikannya, dan menampilkan mempublikasikannya di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis pencipta. Saya bersedia menanggung secara pribadi segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini tanpa melibatkan pihak Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Surabaya
Pada tanggal : 23 Juni 2016

Dosen Pembimbing

Dr. Mahmud Yunus, M.Si
NIP. 19620407 198703 1 005

Yang Menyatakan

Rizky Darmawan
NRP. 1213201052

KETERANGAN

Tanda tangan pembimbing wajib dibubuhi stempel jurusan

Form dicetak dan diserahkan di bagian Pengadaan saat mengumpulkan hard copy TA/Tesis/DIsertasi

TRANSFORMASI WAVELET KONTINU PADA RUANG $L^p(\mathbb{R}^n)$ DENGAN FAKTOR DILASI VEKTOR

Nama Mahasiswa	:	Rizky Darmawan
NRP	:	1213 201 052
Dosen Pembimbing	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si

ABSTRAK

Transformasi wavelet merupakan pengembangan dari transformasi Fourier. Transformasi Fourier hanya memberikan informasi mengenai frekuensi dari suatu data, sedangkan transformasi wavelet tidak hanya memberikan informasi mengenai frekuensi yang ada, melainkan juga memberikan informasi waktu dari frekuensi tersebut. Dari sisi teoritis transformasi wavelet kontinu merupakan topik matematika yang menarik untuk dikembangkan. Salah satu pengembangan tersebut adalah konsep transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor yang merupakan perumuman dari transformasi wavelet multivariabel. Disisi lain, identifikasi tentang transformasi linear terbatas dan kontinuitas suatu fungsi merupakan topik yang menarik untuk dikaji dalam matematika. Suatu transformasi linier yang terbatas menyatakan bahwa fungsi hasil transformasi tidak mungkin melebihi penggandaan fungsi asal. Dalam kalkulus, fungsi kontinu memiliki keterkaitan dengan sifat-sifat limit, integral, dan turunan dari suatu fungsi. Pada penelitian ini diteliti syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi dan diselidiki bahwa dari transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linear terbatas. Dalam penelitian ini diketahui bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linear terbatas, serta diketahui bahwa syarat cukup agar fungsi hasil transformasinya kontinu adalah fungsi wavelet harus berupa fungsi kontinu bertumpuan kompak.

Kata kunci: transformasi wavelet kontinu, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, fungsi kontinu, transformasi linear terbatas

CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM ON $L^p(\mathbb{R}^n)$ SPACE WITH VECTOR DILATION FACTOR

By	:	Rizky Darmawan
Student Identity Number	:	1213 201 052
Supervisor	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si

ABSTRACT

Wavelet transform is an enhancement of Fourier transform. Fourier transform provides information about frequency of data, while wavelet transform is not only provides information of existing frequencies, but also gives us the information of time of frequencies. From the theoretical side, the continuous wavelet transform is a mathematical topics of interest to be developed. One such development is the concept of continuous wavelet transform on $L^p(\mathbb{R}^n)$ space with vector dilation factor, that is a generalization of multivariable continuous wavelet transform . On another hand, the identification of bounded linear transformation and continuity of a function is an interesting topic to be studied in mathematics. A bounded linier transformation represent that output function of transformation is not more than multiplication of input function. In calculus, continuous function has relation with properties of limit, integration, and derivative of a function. In this research we study condition of continuity of output function and we investigate also that continuous wavelet transform on $L^p(\mathbb{R}^n)$ space with vector dilation factor is bounded linear transformation. In this research we show that continuous wavelet transform on $L^p(\mathbb{R}^n)$ space with vector dilation factor is bounded linear transformation and we also show that sufficient condition for the output function to be continuous function is wavelet function must be continuous function with compact support.

Keywords: continuous wavelet transformation, $L^p(\mathbb{R}^n)$ space, continuous function, bounded linear transformation

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat islam, iman, dan ihsan sehinggan penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul "Transformasi Wavelet Kontinu pada Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan Faktor Dilasi Vektor" secara optimal. Shalawat dan salam penulis haturkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW yang telah membawa manusia dari zaman kegelapan menuju zaman terang benderang. Tesis ini merupakan salah satu persyaratan akademis untuk memperoleh gelar magister (S-2) di Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tesis ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnnya kepada:

1. Orang tua dan saudara penulis yang selalu memberikan dukungan, doa dan motivasi agar penulis dapat meyeleaikan Tesis ini.

2. Bapak Dr. Imam Muklash, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS, yang telah membantu dan memberi dukungan selama masa perkuliahan dan penyusunan Tesis ini.

3. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. selaku Koordinator Programa Studi Pascasarjana Matematika ITS, sekaligus sebagai dosen wali dan dosen pembimbing penulis yang telah bersedia membimbing, memotivasi, dan berbagi ilmu dengan sabar kepada penulis sehingga Tesis ini dapat terselesaikan.

4. Prof. Erna Aprliani, Dr. Subiono, dan Dr. Dwi Ratna selaku dosen penguji yang banyak memberikan masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis dalam penyusunan Tesis ini.

5. Seluruh dosen Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang bermanfaat selama masa perkuliahan, serta staf administrasi dan karyawan Program Studi Magister Matematika-ITS atas segala bantuannya.

6. Keluarga besar mahasiswa Pascasarjana Matematika ITS 2013, dan semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam proses penyusunan Tesis ini.

Semoga Allah SWT selalu memberikan karuniah dan hidayah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyelesaian Tesis ini masih terdapat kekurangan dan kekeliruan. Oleh karena itu, penulis mengharap kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

ψ	fungsi wavelet
$\mathbb{R}^n$	himpunan $n-$tupel bilangan real
$\mathbb{R}^n_+$	himpunan $n-$tupel bilangan real positif
$\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$	himpunan pasangan terurut antara elemen di $\mathbb{R}^n$ dengan elemen di $\mathbb{R}^n_+$
$L^p(\mathbb{R}^n)$	ruang fungsi pada $\mathbb{R}^n$ dengan modulus pangkat p terintegral Lebesgue
$L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$	ruang fungsi dengan modulus pangkat p terintegral Lebesgue pada $\mathbb{R}^n$ dan terbatas pada $\mathbb{R}^n_+$
$W_\psi f$	Fungsi hasil transformasi wavelet
$C_0(\mathbb{R}^n)$	ruang fungsi bertumpuan kompak

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bagian ini dijelaskan mengenai hal-hal yang melatar belakangi usulan penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Gagasan yang mendasari analisis wavelet berasal dari tesis Alfred Haar yang berjudul *The Theory of Orthogonal Function Systems* pada tahun 1909. Sedangkan kata “wavelet” sendiri diberikan oleh Jean Morlet dan Alex Grossman di awal tahun 1980-an, yang berasal dari bahasa Perancis “*ondelette*” yang berarti gelombang kecil. Kata “*onde*” yang berarti gelombang diterjemahkan kedalam bahasa Inggris menjadi “*wave*”, lalu digabung dengan kata aslinya sehingga terbentuk kata baru “wavelet” (Gunawan, 2014).

Transformasi wavelet merupakan perbaikan dari transformasi Fourier. Transformasi Fourier hanya memberikan informasi mengenai frekuensi yang muncul dari suatu sinyal, sedangkan transformasi wavelet tidak hanya memberikan informasi mengenai frekuensi yang muncul, akan tetapi juga memberikan informasi waktu dari frekuensi tersebut (Gunawan, 2014).

Dalam kasus satu variabel, wavelet merupakan suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$ yang memenuhi kondisi

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\ dt = 0$$

sedangkan transformasi wavelet dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ adalah

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{a^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt, \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}$$

(Daubechies, 1992). Dalam hal ini, notasi $\overline{\psi(t)}$ menyatakan konjuget dari $\psi(t)$. Lebih lanjut, parameter a disebut faktor dilasi, sedangkan parameter b disebut faktor translasi. Ada dua jenis transformasi wavelet, yaitu transformasi wavelet kontinu (TWK) dan transformasi wavelet diskrit (TWD). Perbedaan diantara keduanya adalah pada nilai parameter translasi dan parameter dilasi. Untuk transformasi wavelet kontinu nilai parameter translasi bernilai real dan nilai parameter dilasi bernilai bilangan real positif, sedangkan pada transformasi wavelet diskrit nilai parameter translasi bilangan bulat dan nilai parameter dilasi bernilai bilangan bulat positif. Secara fisis, jika $f(t)$ adalah amplitudo dari sinyal pada waktu ke-t, maka fungsi hasil transformasi wavelet kontinu $W_\psi f(a,b)$ menyatakan amplitudo sinyal pada frekuensi b dan waktu a (Gunawan, 2014).

Analog dengan kasus satu variabel, untuk kasus multivariabel, suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi \neq 0$ disebut wavelet jika memenuhi kondisi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t)\ dt = 0$$

sedangkan transformasi wavelet dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{a^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}^n$$

dengan a adalah faktor dilasi dan b adalah faktor translasi (Daubechies, 1992).

Dalam bidang teknologi, transformasi wavelet diskrit memiliki manfaat yang lebih besar dari transformasi wavelet kontinu , khususnya dalam teknologi komputasi, hal ini disebabkan semua sinyal atau data yang diolah menggunakan komputer selalu dalam bentuk sinyal atau data diskrit. Akan tetapi dari sisi teoritis, transformasi wavelet kontinu merupakan salah satu topik matematika yang mengalami pengembangan. Salah satu pengembangan tersebut adalah transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Diberikan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, maka transformasi wavelet dari f dengan faktor dilasi vektor adalah

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} dt \tag{1.1}$$

dengan $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, dan $\rho > 0$ tetap (Pathak, 2009). Dengan demikian transformasi wavelet dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ seperti persamaan (1.1) dapat juga ditulis ulang sebagai berikut

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} dt, \quad a \in \mathbb{R}^n_+,\ b \in \mathbb{R}^n$$

untuk pangkat $\rho > 0$ tetap. Disisi lain, sifat kontinuitas suatu fungsi dan penelitian transformasi wavelet sebagai transformasi linear terbatas merupakan topik yang menarik untuk dikaji. Dalam analisis real, kontinuitas dari suatu fungsi memiliki sifat-sifat tertentu, antara lain nilai limit kiri dan limit kanan dari fungsi kontinu adalah sama, fungsi kontinu yang monoton tegas memiliki invers yang juga fungsi kontinu monoton tegas, fungsi kontinu merupakan fungsi terbatas dalam $\mathbb{R}$, dan fungsi kontinu memiliki nilai absolout maksimum dan minimum. Kontinuitas suatu fungsi juga memiliki peranan dalam kalkulus integral dan diferensial, kontinuitas suatu fungsi pada $\mathbb{R}^n$ merupakan syarat cukup agar fungsi tersebut tertintegral Riemann dan merupakan syarat perlu agar fungsi tersebut terdiferensial pada $\mathbb{R}^n$. Lebih lanjut, dalam analisis fungsional, himpunan semua fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n$ membentuk ruang Banach yang bersifat padat dalam $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sedangkan, suatu transformasi linear yang terbatas menunjukkan bahwa transfromasi tersebut memiliki nilai berhingga dalam norma dan mengakibatkan transformasi tersebut kontinu di setiap domain transformasi, disamping itu dari himpunan semua transformasi linear terbatas dapat dibentuk suatu ruang Banach tertentu.

Dalam (Pathak, 1998) telah ditunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu dari fungsi di $L^2(\mathbb{R})$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^2(\mathbb{R})$ ke ruang $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, sedangkan dalam (Grossman dan Morlet, 1984) diperkenalkan transformasi wavelet pada ruang $L^p(\mathbb{R})$, dengan mensubstitusi $f \in L^2(\mathbb{R})$ dengan $f \in L^p(\mathbb{R})$, dan menunjukkan bahwa transformasi wavelet tersebut merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^2(\mathbb{R})\times L^p(\mathbb{R}^n)$. Dalam (Pathak, 2004) juga ditunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R})$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Untuk kekontinuan fungsi hasil transformasi wavelet satu variabel di ruang $L^2(\mathbb{R})$ dapat dilihat dalam (Navarro dan Herrera, 2012).

Sedangkan penelitian untuk mendapatkan syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi dan sifat transformai linear terbatas dari transformasi wavelet pada persamaan (1.1) belum pernah dilakukan. Dalam penelitian ini, didapatkan syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi dan diselidiki bahwa transformasi wavelet dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas. Kontinuitas yang dimaksud adalah kontinuitas pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$, sedangkan transformasi linear yang dimaksud adalah transformasi linear dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$. Ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ adalah ruang fungsi yang berbentuk

$$L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \middle| \sup_{a \in \mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

dengan norma

$$\|f\|_{L^{\infty p}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p}, \quad f \in L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$$

dan merupakan perumuman untuk kasus multivariabel dari ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ dalam (Grossman dan Morlet, 1984).

Dengan demikian, dalam penelitian ini, pekerjaan yang dilakukan adalah mendapatkan konstanta real positif $M > 0$ sedemikian hingga $W_\psi f(a,b)$ pada persamaan (1.1) memenuhi $\|W_\psi f(a,b)\|_{L^{\infty p}} \leq M\|f\|_p$, dan mendapatkan syarat agar fungsi $W_\psi f(a,b)$ pada persamaan (1.1) merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Apakah transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas ?

2. Bagaimana syarat kekontinuan fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Nilai p dan n pada $L^p(\mathbb{R}^n)$ masing-masing adalah bilangan asli.

2. Kekontinuan fungsi hasil transformasi yang dibahas adalah kekontinuan pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$.

3. Transformasi wavelet kontinu yang dibahas merupakan transformasi linear dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

4. Range dari fungsi dalam penelitian ini adalah himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

5. Integral yang digunakan dalam penelitian ini adalah integral Lebesgue.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah yang ada, tujuan penelitian ini adalah

1. Mengidentifikasi bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

2. Mendapatkan syarat agar fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini antara lain

1. Sebagai tambahan wawasan dan keilmuan dalam matematika khususnya di bidang transformasi wavelet.

2. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai transformasi wavelet.

3. Sebagai referensi untuk penelitian dalam bidang sinyal multivariabel.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bagian ini akan diberikan teori-teori yang menunjang dalam proses penelitian, yaitu konsep teori ukuran dan integral di $\mathbb{R}^n$, transformasi linear terbatas, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$, fungsi kontinu di $\mathbb{R}^n$, himpunan kompak, transformasi wavelet kontinu di ruang $L^2(\mathbb{R})$, transformasi wavelet kontinu di ruang $L^2(\mathbb{R}^n)$, dan transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.1 Kajian Pustaka

Pada bagian ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat dari transformasi wavelet satu variabel dari fungsi di ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan ruang $L^p(\mathbb{R})$, transformasi wavelet multivariabel $L^2(\mathbb{R}^n)$ dan $L^p(\mathbb{R}^n)$, dan transformasi wavelet di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor.

2.1.1 Wavelet Satu Variabel

Diberikan $L^2(\mathbb{R})$ adalah kelas dari fungsi-fungsi bernilai kompleks pada $\mathbb{R}^n$ yang kontinu dan modulus kuadratnya terintegral Lebesgue pada $\mathbb{R}$. Dalam kasus satu variabel, wavelet merupakan suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R}),\ \ \psi \neq 0$ yang memenuhi kondisi rata-rata nol, yaitu

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\ \ dt = 0,\ \ t \in \mathbb{R}$$

sedangkan definisi dari transformasi wavelet kontinu dari fungsi di ruang $L^2(\mathbb{R})$ adalah sebagai berikut

Definisi 2.1.1. *(Daubechies, 1992) Diberikan $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ adalah suatu wavelet. Transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R})$ adalah fungsi $W_\psi f$ dengan*

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{a^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R} \qquad (2.1)$$

Notasi $\overline{\psi(t)}$ menyatakan konjuget dari $\psi(t)$. Dalam hal ini, parameter a disebut faktor dilasi, sedangkan parameter b disebut faktor translasi. Secara fisis interpetasi dalam analisis sinyal adalah, jika $f(t)$ adalah amplitudo sinyal pada waktu ke-t, maka fungsi hasil transformasi wavelet kontinu $W_\psi f(a,b)$ menyatakan amplitudo sinyal pada frekuensi b dan waktu a (Gunawan, 2014). Wavelet ψ memenuhi kondisi *admissible*, yaitu

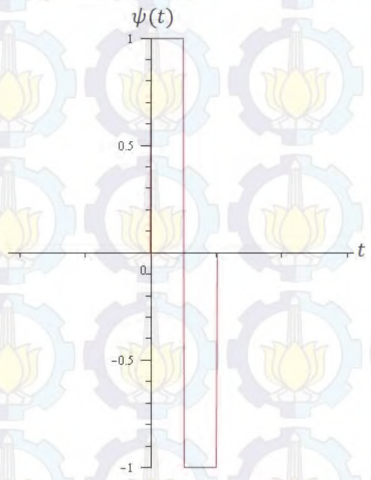
$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

dengan $\Psi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)e^{-it\omega}dt$ adalah transformasi Fourier dari ψ. Sedangkan invers dari transformasi wavelet satu dimensi tersebut adalah

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} W_\psi f(a,b) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{da}{a^{3/2}} db$$

(Daubechies, 1992) Salah satu contoh wavelet adalah wavelet Haar yang berbentuk

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$



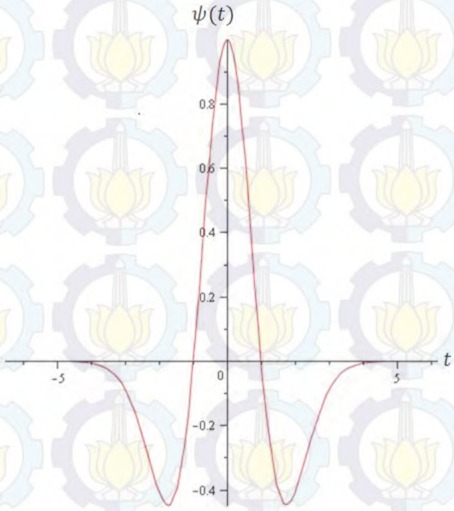
Gambar 2.1: Grafik Haar

dan wavelet Topi Meksiko yang berbentuk

$$\psi(t) = \left(1 - t^2\right) \exp(-\frac{t^2}{2}), \ \ t \in \mathbb{R}$$

(Chui, 1992).

Dalam (Grossman dan Morlet, 1984), transformasi wavelet satu variabel dari fungsi di $L^2(\mathbb{R})$ diperumum di ruang $L^p(\mathbb{R})$, yaitu dengan mensubstitusi f di $L^2(\mathbb{R})$ pada persamaan (2.1) menjadi di f di $L^p(\mathbb{R})$, dalam penelitian tersebut Grossman



Gambar 2.2: Grafik Mexican Hat

mendapatkan rumus invers transformasi wavelet kontinu satu variabel di ruang $L^p(\mathbb{R})$ tanpa syarat kekonvergenannya, serta menunjukkan bahwa transformasi wavelet satu variabel di ruang $L^p(\mathbb{R})$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R})$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ dengan memenuhi

$$\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^{\infty p}} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$

(Grossman dan Morlet, 1984). Dalam hal ini norma yang dimaksud adalah norma dari ruang fungsi pada $\mathbb{R}$. Disisi lain, dalam (Navarro dan Herrera, 2012) diberikan syarat sehingga fungsi hasil transformasi wavelet di $L^2(\mathbb{R})$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, yaitu wavelet ψ harus berupa fungsi kontinu bertumpuan kompak, dengan kata lain $\psi \in C_0(\mathbb{R})$.

2.1.2 Wavelet Multivariabel

Konsep transformasi wavelet dapat diperluas untuk kasus multivariabel. Dalam hal ini definisi wavelet analog dengan definisi wavelet pada kasus satu variabel. Diberikan $L^2(\mathbb{R})^n$ adalah kelas dari fungsi-fungsi bernilai kompleks pada $\mathbb{R}^n$ yang kontinu dan modulus kuadratnya terintegral Lebesgue pada $\mathbb{R}^n$, yaitu

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

Suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \ \psi \neq 0$ disebut wavelet jika memenuhi kondisi rata-rata nol, yaitu

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t)\ \ dt = 0,\ \ t \in \mathbb{R}^n$$

sedangkan definisi dari transformasi wavelet kontinu dari fungsi di ruang $L^2(\mathbb{R}^n)$ diberikan pada definisi di bawah.

Definisi 2.1.2. *(Daubechies, 1992) Diberikan $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah suatu wavelet. Transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah fungsi $W_\psi f$ dengan*

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{a^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt, \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

Transformai wavelet di atas merupakan transformasi linear dari $L^2(\mathbb{R}^n)$ ke $L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalam hal ini parameter a disebut faktor dilasi dan b disebut faktor translasi. Dari definisi wavelet dan transformasi wavelet di atas, terlihat jelas bahwa fungsi hasil transformasi wavelet merupakan fungsi bernilai kompleks. Integral yang digunakan dalam perhitungan transformasi wavelet di atas adalah integral Lebesgue, hal ini bertujuan agar fungsi asal dapat dihampiri fungsi basis wavelet secara kombinasi linier dalam konsep *almost everywhere*, sebab pada kenyataannya terdapat basis wavelet tertentu yang menghampiri fungsi asal secara kombinasi linier tetapi tidak terintegral Lebesgue, akibatnya hampiran tersebut tidak dapat dikatakan representasi dari fungsi asal.

Ambil kasus di $\mathbb{R}^3$, misalkan $f(t,x,y)$ adalah ampliudo dari suatu sinyal citra hitam putih f yang bergantung pada waktu ke-t, derajat keabuan pada posisi horizontal x, dan derajat keabuan pada posisi vertikal y, maka $W_\psi f(a,b)$ pada persamaan (2.2) merupakan amplitudo sinyal citra pada frekuensi $b = (b_1, b_2, b_3)$ yang terjadi pada posisi waktu a, dengan b_1, b_2, b_3 masing-masing merupakan frekuensi sinyal yang bersesuaian dengan waktu ke-t, derajat warna putih x, dan derajat warna hitam y berturut-turut. Seperti halnya pada wavelet satu variabel, wavelet ψ multivariabel juga memenuhi kondis *admissible* yang berupa

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

dengan $|\omega| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\omega_i|^2}$, dan $\Psi(\omega)$ adalah transformasi Fourier dari ψ. Sedangkan invers transformasi wavelet multivariabel di $L^2(\mathbb{R}^n)$ berbentuk

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n_+} W_\psi f(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\ \ \frac{da}{a^{3/2}}\ \ db$$

(Daubechies, 1992). Jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, maka transformasi wavelet multivariabelnya merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^1(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^1(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ dengan memenuhi

$$\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^1} \leq a^{1/2}(2\pi)^{-1}\, \|\psi\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}.$$

Beberapa contoh wavelet multivariabel antara lain wavelet Haar multivariabel yang berbentuk

$$\psi(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(t_i),\;\; t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

dengan ψ_i adalah wavelet Haar satu variabel, serta wavelet Topi Meksiko multivariabel yang berbentuk

$$\psi(t) = \left(1 - \|t\|^2\right)\exp(-\frac{\|t\|^2}{2}),\;\; t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

(Chui, 1992). Untuk transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu transformasi wavelet pada persamaan (2.2) dengan mensubstitusi $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dengan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi skalar $a > 0$, dapat dilihat dalam (Pathak, 2009). Selanjutnya Pathak memperkenalkan transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definisi 2.1.3. *(Pathak, 2009) Diberikan $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah suatu wavelet. Transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah fungsi $W_\psi f$ dengan*

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} dt \qquad (2.3)$$

dengan $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+,\;\; b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, dan $\rho > 0$ tetap.

Transformasi wavelet dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pada persamaan (2.3) dapat juga ditulis ulang sebagai berikut

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} dt, \quad a \in \mathbb{R}^n_+,\;\; b \in \mathbb{R}^n$$

untuk pangkat $\rho > 0$ tetap.

Sebagai contoh perhitungan ambil kasus di $\mathbb{R}^2$ untuk pangkat $\rho = 1$. Diberikan $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dengan

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_1 t_2} & \text{untuk}\;\; 1 \leq t_1 < \infty,\;\; 1 \leq t_2 < \infty \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases} \qquad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$$

akan dihitung transformasi waveletnya menggunakan wavelet Haar dua variabel

$$\psi(t) = \psi_1(t_1)\ \psi_2(t_2),\ \ t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$$

dengan ψ_i adalah wavelet Haar satu variabel

$$\psi_i(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq t_i < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq t_i < 1 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Untuk $i = 1, 2$ jelas bahwa

$$\psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } b_i \leq t_i < \frac{1}{2}a_i + b_i, \\ -1 & \text{untuk } \frac{1}{2}a_i + b_i \leq t_i < a_i + b_i \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

dan $f(t)$ dapat ditulis

$$f(t) = f_1(t_1)f_2(t_2)$$

dengan

$$f_i\,(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_i} & \text{untuk } 1 \leq t_i < \infty \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases} \qquad t_i \in \mathbb{R}$$

Selanjutnya perhitungan transformasi wavelet dengan dilasi vektor dari fungsi f adalah

$$W_f(a, b) = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \overline{\psi_1\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}\right)}\ \overline{\psi_2\left(\frac{t_2 - b_2}{a_2}\right)}\ dt_1 dt_2$$

dengan menggunakan teorema Fubini maka perhitungannya dapat dilakukan secara bertahap untuk masing-masing $i = 1, 2$.

- Untuk $a_i + b_i \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)}\ f_i(t_i)\ dt_i &= \frac{1}{a_i}\Big(\int_{-\infty}^{a_i + b_i} \psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)\ \cdot 0\ dt_i \\ &+ \int_{a_i + b_i}^{1} \psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)\ f_i(t_i)\ dt_i + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot\ \frac{1}{t_i}\ dt_i\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Untuk $\frac{1}{2}a_i + b_i \leq 1$ dan $a_i + b_i > 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)}\ f_i(t_i)\ dt_i &= \frac{1}{a_i}\Big(\int_{-\infty}^{1} \psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)\ \cdot 0\ dt_i \\ &+ \int_{1}^{a_i+b_i} (-1)\ \frac{1}{t_i}\ dt_i + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot\ \frac{1}{t_i}\ dt_i\Big) \\ &= \frac{1}{a_i}[-\ln t]_1^{a_i+b_i} \\ &= -\frac{1}{a_i}\ln(a_i + b_i)\end{aligned}$$

- Untuk $b_i \leq 1$ dan $\frac{1}{2}a_i + b_i > 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)}\ f_i(t_i)\ dt_i &= \frac{1}{a_i}\Big(\int_{-\infty}^{1} 0 \cdot 0\ dt_i + \int_{1}^{b_i} \psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)\ f_i(t_i)\ dt_i \\ &+ \int_{b_i}^{\frac{1}{2}a_i+b_i} 1 \cdot\ \frac{1}{t_i}\ dt_i + \int_{\frac{1}{2}a_i+b_i}^{a_i+b_i} (-1) \cdot\ \frac{1}{t_i}\ dt_i \\ &+ \int_{a_i+b_i}^{\infty} 0 \cdot\ \frac{1}{t_i}\ dt_i\Big) \\ &= \frac{1}{a_i}\left([\ln t]_{b_i}^{\frac{1}{2}a_i+b_i} + [-\ln t]_{\frac{1}{2}a_i+b_i}^{a_i+b_i}\right) \\ &= \frac{1}{a_i}\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_i + b_i)^2}{a_i(a_i + b_i)}\right)\end{aligned}$$

berikutnya, misalkan untuk $i = 1, 2$

$$W_i f(a_i, b_i) = \frac{1}{a_i}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_i\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)}\ f_i(t_i)\ dt_i$$

maka

$$W_i f(a_i, b_i) = \begin{cases} -\frac{1}{a_i}\ln(a_i + b_i) & \text{untuk } \frac{1}{2}a_i + b_i \leq 1 \text{ dan } a_i + b_i > 1, \\ \frac{1}{a_i}\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_i+b_i)^2}{a_i(a_i+b_i)}\right) & \text{untuk } b_i \leq 1 \text{ dan } \frac{1}{2}a_i + b_i > 1 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

dengan demikian

$$W_f(a, b) = W_1 f(a_1, b_1) W_2 f(a_2, b_2)$$

atau dapat ditulis

$$W_f(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{a_1a_2}\ln(a_1+b_1)\ln(a_2+b_2) & \text{untuk } \frac{1}{2}a_1+b_1 \leq 1,\ a_1+b_1 > 1, \\ & \frac{1}{2}a_2+b_2 \leq 1,\ a_2+b_2 > 1 \\ -\frac{1}{a_1a_2}\ln(a_1+b_1)\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_2+b_2)^2}{a_2(a_2+b_2)}\right) & \text{untuk } \frac{1}{2}a_1+b_1 \leq 1,\ a_1+b_1 > 1, \\ & b_2 \leq 1,\ \frac{1}{2}a_2+b_2 > 1 \\ -\frac{1}{a_1a_2}\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_1+b_1)^2}{a_1(a_1+b_1)}\right)\ln(a_2+b_2) & \text{untuk } \frac{1}{2}a_2+b_2 \leq 1,\ a_2+b_2 > 1, \\ & b_1 \leq 1,\ \frac{1}{2}a_1+b_1 > 1 \\ \frac{1}{a_1a_2}\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_1+b_1)^2}{a_1(a_1+b_1)}\right)\ln\left(\frac{(\frac{1}{2}a_2+b_2)^2}{a_2(a_2+b_2)}\right) & \text{untuk } b_1 \leq 1,\ \frac{1}{2}a_1+b_1 > 1, \\ & b_2 \leq 1,\ \frac{1}{2}a_2+b_2 > 1 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Secara intuitif, faktor dilasi vektor a pada wavelet ψ menunjukkan bahwa nilai fungsi wavelet $\psi(t-b)$ pada masing-masing elemen dari variabel vektor $t-b$ mengalami dilasi dengan nilai yang berbeda, yaitu sebesar $\frac{1}{a_i}$ untuk setiap elemen vektor $t_i - b_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Hal ini berbeda dengan wavelet yang memiliki faktor dilasi bilangan real pada transformasi wavelet pada persamaan (2.2), dengan nilai fungsi wavelet $\psi(t-b)$ mengalami dilasi dengan nilai yang sama untuk setiap elemen $t_i - b_i$ dari variabel vektor $t-b$.

Dalam (Pathak, 1998) telah ditunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu dari fungsi di $L^2(\mathbb{R})$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^2(\mathbb{R})$ ke ruang $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Selain itu dalam buku tersebut diperoleh syarat agar transformasi wavelet pada ruang $L^p(\mathbb{R})$ dengan dilasi vektor mempunyai invers, dengan syaratnya adalah $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dan rumus inversnya berbentuk

$$f(t) = (-1)^n \frac{1}{\pi^n A_n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n_+} W_\psi f(a,b) a^{\rho-2} \frac{1}{b-t} \; da \; db$$

dengan $A_n = \int_{\mathbb{R}^n_+} \overline{\psi(t)} dt$. Akan tetapi penelitian untuk mendapatkan syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi dan syarat transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor sebagai transformasi linear terbatas belum dilakukan.

2.2 Dasar Teori

Pada bagian ini diberikan teori-teori pendukung yang berguna dalam penelitian ini, antara lain konsep transformasi linear terbatas, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$, ketaksamaan Holder, teorema Kekontinuan Operator Translasi, fungsi kontinu, dan himpunan kompak

2.2.1 Transformasi Linear pada $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$

Pada bagian ini diberikan definisi ruang bernorma, transformasi linear terbatas pada ruang bernorma, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, dan ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Definisi 2.2.1. *(Yunus, 2005) Misalkan V dan W adalah dua ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Transformasi linear dari V ke W adalah pemetaan $T : V \to W$ yang memenuhi*

(TL1) Untuk setiap $x, y \in V$ berlaku $T(x + y) = T(x) + T(y)$

(TL2) Untuk setiap $c \in \mathbb{F}$ dan $x \in V$ berlaku $T(cx) = cT(x)$

Selanjutnya berikut ini diberikan definisi transformasi linear terbatas pada ruang bernorma.

Definisi 2.2.2. *(Yunus, 2005) Misalkan V dan W adalah dua ruang bernorma atas $\mathbb{F}$. Transformasi linear $T : V \to W$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M \geq 0$ sedemikian hingga*

$$\|T(x)\|_W \leq M\|x\|_V, \ \forall x \in V$$

Karena pembahasan mengenai transformasi linear terbatas pada transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dalam penelitian ini merupakan transformasi linear dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$, maka terlebih dahulu diberikan definisi dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Diberikan nilai p yang memenuhi $1 \leq p \leq \infty$, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\}, \quad \text{untuk } 1 \leq p < \infty$$

dan

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | \text{ess sup} \, |f(t)| < \infty \}, \quad \text{untuk } p = \infty$$

dengan untuk $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan norma baku pada $L^p(\mathbb{R}^n)$ sebagai berikut

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad \text{untuk } 1 \leq p < \infty$$

dan

$$\|f\|_{L^p} := \text{ess sup} \, |f(t)| < \infty, \quad \text{untuk } p = \infty.$$

(Jones, 1993) dengan integral yang dimaksud adalah integral Lebesgue pada $\mathbb{R}^n$. Secara umum, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach, tetapi bukan ruang Hilbert sebab tidak didefinisikan Hasil Kali Dalam yang bersesuaian pada $L^p(\mathbb{R}^n)$, sedangkan untuk $p = 2$, yaitu ruang $L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Hilbert dengan Hasil Kali Dalam

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

(Jones, 1993). Selanjutnya, diperkenalkan ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ yang merupakan perumuman untuk kasus multivariabel dari ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ dalam (Grossman dan Morlet, 1984), yaitu ruang fungsi yang berbentuk

$$L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \middle| \sup_{a\in\mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

dengan norma

$$\|f\|_{L^{\infty p}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p}, \ \ f \in L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$$

Berikut ini diberikan beberapa teorema yang terkait dengan penelitian ini.

Teorema 2.2.1. *(Jones, 1993) Diberikan $p, q \in \mathbb{R}$ dengan $1 \le p \le \infty$ dan q adalah konjuget eksponen dari p, yaitu*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Misalkan f dan g masing-masing adalah fungsi pada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bernilai kompleks. Jika $f \in L^p(E)$ dan $g \in L^q(E)$, maka fungsi $fg \in L^1(E)$, serta berlaku

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Ketaksamaan di atas dikenal juga dengan Ketaksamaan Holder.

Teorema 2.2.2. *(Jones, 1993) Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan $1 \le p < \infty$, maka berlaku*

$$\lim_{|h|\to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} = 0$$

dengan $|h| = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{1/2}$.

teorema di atas disebut sebagai teorema Kekontinuan Operator Translasi pada f. Sebagai catatan, nilai p pada definisi ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan sifat-sifatnya di atas merupakan bilangan real yang memenuhi $1 \le p < \infty$, sedangkan dalam penelitian ini nilai p dibatasi pada bilangan asli.

2.2.2 Fungsi Kontinu pada $\mathbb{R}^n$

Tujuan penelitian ini, selain untuk menunjukkan bahwa transformasi wavelet dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas, juga bertujuan untuk memberikan syarat cukup sehingga fungsi hasil transformasi wavelet tersebut merupakan fungsi kontinu. Oleh karena itu perlu diberikan definisi dan sifat-sifat dari fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 2.2.3. *(Webb, 1991) Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Fungsi f dikatakan kontinu pada titik $a \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m}$ untuk $x \in A$ dan $\|x - a\|_{\mathbb{R}^n}$. Jika f kontinu pada setiap titik pada A, maka f dikatakan kontinu pada A.*

Berdasarkan definisi di atas, fungsi f dikatakan kontinu pada A jika dan hanya jika

$$\|f(t+h) - f(t)\|_{\mathbb{R}^m} \to 0, \quad \text{untuk } \|h\|_{\mathbb{R}^n} \to 0.$$

Salah satu contoh fungsi kontinu adalah fungsi konstan dan fungsi linear(Apostol, 1996). Beberapa sifat fungsi kontinu antara lain jumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan komposisi dua atau lebih fungsi kontinu menghasilkan fungsi yang juga kontinu.

Teorema 2.2.3. *(Webb, 1991) Misalkan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dapat ditulis ke dalam bentuk $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Fungsi f kontinu pada $a \in A$ jika dan hanya jika f_i kontinu pada a.*

teorema di atas menjamin bahwa setiap fungsi kontinu bernilai $\mathbb{R}^m$ yang komponen-komponennya dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi bernilai real, berakibat komponen-komponennya juga merupakan fungsi kontinu, begitu juga sebaliknya. Berikut ini diberikan teorema yang menyatakan hubungan antara himpunan kompak dengan fungsi kontinu.

Teorema 2.2.4. *(Yunus, 2005) Jika X himpunan kompak, maka untuk sebarang fungsi $f : X \to X$ yang kontinu di X mempunyai range $f(X)$ yang juga kompak. Lebih lanjut, jika f adalah fungsi kontinu bijektif, maka inversnya, yaitu f^{-1} adalah fungsi kontinu.*

Tumpuan dari fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ yang dinotasikan dengan supp(f) adalah closure suatu himpunan bagian dari domain f sedemikian hingga nilai fungsi f di himpunan tersebut tidak bernilai nol, dengan kata lain supp(f) adalah himpunan yang berbentuk

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$$

Diberikan himpunan $C_0(\mathbb{R}^n)$, yaitu himpunan semua fungsi kontinu bernilai real yang bertumpuan kompak, yaitu

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ kontinu, dan } \operatorname{supp}(f) \text{ kompak}\}$$

Himpunan $C_0(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan bagian dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan bersifat padat di $L^p(\mathbb{R}^n)$ (closure dari $C_0(\mathbb{R}^n)$ sama dengan $L^p(\mathbb{R}^n)$) (Jones, 1993).

BAB III
METODA PENELITIAN

Pada bagian ini diberikan tahapan yang digunakan untuk melakukan penelitian ini.

1. Studi Literatur.
   Pada tahap ini, ditelusuri dan dipelajari literatur tentang dasar teori dan referensi terbaru yang terkait dalam penelitian ini, yaitu pembahasan mengenai transformasi linear pada ruang bernorma, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, transformasi wavelet kontinu di ruang $L^2(\mathbb{R})$, transformasi wavelet kontinu di ruang $L^2(\mathbb{R}^n)$, dan transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor. Pembahasan ini bertujuan untuk menunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear pada ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

2. Menunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu merupakan transformasi linear terbatas.
   Pada bagian ini diuraikan tahap-tahap yang berupa teorema beserta pembuktiannya untuk menunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas pada ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

3. Mendapatkan syarat kekontinuan fungsi hasil transformasi.
   Pada tahap ini diuraikan syarat kekontinuan fungsi pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$ dari fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4. Menulis *paper*.
   Pada tahap ini, dilakukan penulisan *paper* dari hasil penelitian yang telah didapatkan.

5. Mengikuti seminar nasional.
   Paper yang telah ditulis selanjutnya dipresentasikan dalam suatu seminar nasional.

6. Membuat kesimpulan.
   Berdasarkan hasil penelitian terhadap transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ sebagai transformasi linear terbatas dan syarat kekontinuan fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, maka dibuat suatu kesimpulan yang akan menjawab rumusan masalah yang diberikan sebelumnya.

7. Menulis laporan.
   Penulisan laporan hasil penelitian dilakukan mulai dari awal pengerjaan.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diberikan proses, penjabaran, dan pembuktian untuk membentuk teorema yang memaparkan hasil dari penelitian ini, yaitu teorema yang menyatakan bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$, serta teorema yang memberikan syarat cukup agar fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$. Pada pembahasan ini diasumsikan nilai p adalah bilangan asli, akan tetapi nilai konjuget dari p, yaitu q, memenuhi $1 \leq q \leq \infty$. Disamping itu, pada penelitian ini selalu diasumsikan notasi ψ menyatakan fungsi wavelet.

Sebelumnya, untuk mempermudah penulisan, diberikan notasi-notasi berikut. Diberikan ψ adalah wavelet, serta $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan fungsi $\psi_{a,b}$, $\psi_{a,\text{-}}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\psi_{a,b}(t) &:= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\ \psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right) \\
\psi_{a,\text{-}}(t) &:= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\ \psi\left(\left(\frac{t_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)
\end{aligned}$$

untuk setiap $t = (t_1, t_2, \cdot, t_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\rho > 0$ adalah tetap. Dengan demikian transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ yang bersesuaian dengan wavelet ψ dapat ditulis

$$\begin{aligned}
W_\psi f(a,b) &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,\text{-}}(t-b)} dt
\end{aligned}$$

Jelas bahwa notasi-notasi di atas ekivalen, akan tetapi penggunaanya disesuaikan dengan penulisan agar penjabaran dan pembuktian pada lemma-lemma dan teorema-teorema pada bab ini agar menjadi lebih sederhana. Dengan mudah dapat diketahui bahwa fungsi wavelet ψ, disamping berada di $L^2(\mathbb{R}^n)$ juga berada di $L^1(\mathbb{R}^n)$, hal ini disebabkan sifat $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) = 0$ yang berakibat $|\psi|$ terintegral.

Disamping itu fungsi $\psi_{a,b}$ juga merupakan elemen di $L^1(\mathbb{R}^n)$, untuk menunjukkan hal ini, pandang $z_i = \frac{t_i - b_i}{a_i}$ untuk $i = 1, 2 \cdots, n$, karena $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka dengan teknik integral substitusi didapat

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_{a,b}(t)|\, dt &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi \left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i} \right)_{i=1}^n \right) \right| dt \\
&= \frac{1}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n} \right) \right| dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{1}{a_1^\rho a_2^\rho \cdots a_n^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n} \right) \right| dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{1}{a_n^\rho} \int_{\mathbb{R}} \cdots \frac{1}{a_1^\rho} \int_{\mathbb{R}} \left| \psi \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n} \right) \right| dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{a_n}{a_n^\rho} \int_{\mathbb{R}} \cdots \frac{a_1}{a_1^\rho} \int_{\mathbb{R}} |\psi(z_1, \cdots, z_n)|\, dz_1 \cdots dz_n \\
&= \frac{1}{a_n^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \frac{1}{a_1^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(z_1, \cdots, z_n)|\, dz_1 \cdots dz_n \\
&= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(z)|\, dz \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ini berarti $\psi_{a,b}$ merupakan elemen di $L^1(\mathbb{R}^n)$, hal ini juga berarti $\psi_{a,\cdot}(\cdot - b)$ elemen di $L^1(\mathbb{R}^n)$, sebab $\psi_{a,b} = \psi_{a,\cdot}(\cdot - b)$.

Suatu transformasi akan bermakna jika memiliki nilai berhingga, oleh karena dalam hal ini perlu ditunjukkan bahwa fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $W_\psi f(a, b)$ memiliki nilai berhingga. Dari kenyataan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $\psi_{a,b} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka fungsi $\left|f\overline{\psi_{a,b}}\right|$ merupakan fungsi terukur dan memiliki nilai berhingga. Berikutnya akan ditunjukkan nilai integral dari $\left|f\overline{\psi_{a,b}}\right|$ adalah berhingga. Untuk menunjukkan hal ini, pandang dua kasus, yaitu untuk $|f(t)| < 1$ dan $|f(t)| \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$. Untuk $|f(t)| < 1$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$, maka diperoleh

$$\left| f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} \right| < \left| \overline{\psi_{a,b}(t)} \right|, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^n,$$

akibatnya dari sifat integral didapat

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} \right| dt &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi_{a,b}(t)} \right| dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

Sedangkan untuk $|f(t)| \geq 1, \forall t \in \mathbb{R}^n$. Dari $p \in \mathbb{N}$, maka berlaku

$$|f(t)| \leq |f(t)|^p, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^n$$

dilain pihak $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, yang berarti $\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \, dt < \infty$, akibatnya dari sifat integral didapat

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, dt \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \, dt < \infty.$$

maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, dt < \infty.$$

Disisi lain, karena $\int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi_{a,b}(t)} \right| dt < \infty$, maka $\psi_{a,b}$ terbatas, dengan kata lain terdapat konstanta real positif K sedemikian hingga

$$\left| \overline{\psi_{a,b}(t)} \right| < K, \ \forall \ t \in \mathbb{R}^n,$$

hal ini berakibat

$$\left| f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} \right| < K \, |f(t)| \, .$$

Dengan demikian, dari sifat integral diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} \right| dt &< K \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned}W_\psi f(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} \right| dt \\ &< \infty, \ \forall \ a \in \mathbb{R}^n_+, \ b \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Ini artinya, nilai fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor, yaitu $W_\psi f(a,b)$ adalah berhingga, untuk setiap $a \in \mathbb{R}^n_+,\ \ b \in \mathbb{R}^n$.

4.1 Transformasi Wavelet Kontinu pada Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan Dilasi Vektor sebagai Transformasi Linear Terbatas

Telah dijelaskan sebelumnya pada bab 2 bahwa transformasi linear merupakan pemetaan atau fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor yang lain yang memenuhi sifat linearitas (additif dan homogen). Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa transformasi wavelet dengan dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $W_\psi f$ merupakan transformasi linier terbatas, khususnya dengan domain $L^p(\mathbb{R}^n)$ serta kodomain $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$, dengan $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ merupakan ruang fungsi yang berbentuk

$$L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | \sup_{a \in \mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

dengan norma

$$\|f\|_{L^{\infty p}} := \sup_{a \in \mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p \, db \right)^{1/p}, \ \ f \in L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$$

Sebelumnya, untuk menunjukkan suatu relasi merupakan transformasi linear terbatas atau tidak, terlebih dahulu perlu ditunjukkan bahwa relasi tersebut merupakan pemetaan yang bersifat linear(additif dan homogen). Oleh karena itu, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa transformasi wavelet dengan dilasi vektor $W_\psi f$ merupakan transformasi yang linier, yaitu bersifat additif dan homogen. Akan tetapi sebelum itu, akan ditunjukkan bahwa transformasi wavelet $W_\psi f$ merupakan well-define. Ambil sebarang $f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dengan $f_1(t) = f_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$, maka

$$\begin{aligned} W_\psi f_1(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_2(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \\ &= W_\psi f_2(a,b), \quad a \in \mathbb{R}^n_+, \ \ b \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Jadi, transformasi wavelet $W_\psi f$ adalah well define

Selanjutnya akan ditunjukkan $W_\psi f$ memenuhi sifat additif dan homogen. Ambil sebarang $f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka dari sifat intgeral, untuk

$a \in \mathbb{R}^n_+,\ \ b \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned} W_\psi(f_1+f_2)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_1+f_2)(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_1(t)+f_2(t))\,\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t)\overline{\psi_{a,b}(t)} + f_2(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt + \int_{\mathbb{R}^n} f_2(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= W_\psi f_1(a,b) + W_\psi f_2(a,b) \end{aligned}$$

Ini berarti $W_\psi f$ bersifat additif. Berikutnya dari sifat integral, juga diperoleh

$$\begin{aligned} W_\psi(cf_1)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (cf_1)(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} cf_1(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= c\int_{\mathbb{R}^n} f_1(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt \\ &= cW_\psi f_1(a,b) \end{aligned}$$

Ini artinya $W_\psi f$ bersifat homogen. Jadi transformasi wavelet kontinu dengan dilasi vektor dari fungsi di $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Berdasarkan definisi transformasi linear terbatas yang dijelaskan di bab 2, untuk menunjukkan transformasi linear $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ merupakan suatu transformasi linear terbatas, harus didapatkan suatu konstanta real positif M sedemikian hingga

$$\|T(f)\|_{L^{\infty p}} \leq M \|f\|_{L^p}$$

Dalam hal ini, nilai M tidak bergantung pada f.

Nilai konstanta M pada ketaksamaan dalam definisi transformasi linier terbatas di atas menunjukkan bahwa norma fungsi hasil transformasi di domain transformasi tidak mungkin melebihi penggandaan norma fungsi asal di domain asal fungsi. Dalam bidang terapan, dapat dikatakan bahwa sinyal hasil transformasi tidak mungkin sama dengan sinyal asal, melainkan menghampiri sinyal asal.

Dilain pihak fungsi hasil transformai wavelet kontinu dengan dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan elemen di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$. Untuk keperluan ini, misalkan $y_i = t_i - b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, maka dengan teknik integrasi substitusi, didapat

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{a,-}(t_1-b_1,\cdots,t_n-b_n)}dt_1\cdots dt_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{a,-}(y_1,\cdots,y_n)}dy_1\cdots dy_n \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_{a,-}(t_1-b_1,\cdots,t_n-b_n)}db_1\cdots db_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(y)}dy \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}db
\end{aligned}$$

hal ini juga berarti

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}db = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \tag{4.1}$$

Selanjutnya, diberikan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, maka

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}db\ dt &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}db\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\left((-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{a,-}(t-b)}db\right)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\cdot 0\ dt \\
&= 0 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

akibatnya dari teorema Fubini, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a,b)db &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\ db \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}db\ dt \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W_\psi f(a,b)|\, db < \infty$$

Hal ini berakibat, $|W_\psi f(a,\cdot)|$ terbatas, dengan kata lain terdapat konstanta real positif A sehingga $|W_\psi f(a,b)| < A$, $\forall \;\; b \in \mathbb{R}^n$ dengan $a \in \mathbb{R}^n_+$ tetap. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |W_\psi f(a,b)|^p \, db &< A^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |W_\psi f(a,b)| \, db \\ &< \infty, \;\; \forall a \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ini artinya $W_\psi f(a,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Secara intuitif dapat dikatakan bahwa transformasi wavelet dengan dilasi vektor $W_\psi f$ merupakan elemen di $L^p(\mathbb{R}^n)$ terhadap faktor translasinya, sebab pada (4.2) terlihat bahwa faktor translasi b mengalami integral, sedangkan faktor dilasi a hanya bertindak sebagai konstanta.

Dengan mengunakan kenyataan bahwa $W_\psi f(a,\cdot)$ merupakan elemen di $L^p(\mathbb{R}^n)$, maka dapat diperoleh beberapa sifat dari transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor, yaitu $W_\psi f$, yang dinyatakan dalam lemma berikut

Lemma 4.1.1. *Diberkan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n_+$ dan $W\psi f$ adalah transformasi wavelet dari f. Misalkan q adalah konjuget eksponen dari p, maka*

(a) Fungsi $f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}$ elemen $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Fungsi $(W_\psi f(a,\cdot))^{p-1}$ elemen $L^q(\mathbb{R}^n)$.

(c) Fungsi $\left\| f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)} \right\|_{L^p}$ terintegral pada $\mathbb{R}^n$.

Bukti. (a) Dari $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right| dt < \infty$, maka $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right| db < \infty$, akibatnya terdapat konstanta real positif C sedemikian hingga $\left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right| < C, \;\; \forall b \;\; \in \mathbb{R}^n$ hal ini berakibat

$$\left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right|^p < C^{p-1} \left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right|$$

maka dari sifat integral diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right|^p db &< C^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{\psi_{a,-}(t-b)}\right| db \\ &< \infty\end{aligned}$$

oleh karena itu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)\overline{\psi_{a,\cdot}(t-b)} \right|^p db &= |f(t)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi_{a,\cdot}(t-b)} \right|^p db \\ &< \infty\end{aligned}$$

Jadi $f(t)\overline{\psi_{a,\cdot}(t-\cdot)}$ elemen $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Karena q konjuget eksponen dari p,maka $(p-1)q = p$, akibatnya berdasarkan (4.2) diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| |W_\psi f(a,b)|^{p-1} \right|^q db &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|W_\psi f(a,b)|^{p-1} \right)^q db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |W_\psi f(a,b)|^p db \\ &< \infty\end{aligned}$$

Ini berarti $(W_\psi f(a,\cdot))^{p-1}$ elemen $L^q(\mathbb{R}^n)$

(c) Dari $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ maka $|f|$ terintegral, dengan demikian dari (4.1) didapat

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t)\overline{\psi_{a,\cdot}(t-\cdot)} \right\|_{L^p} dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t)\overline{\psi_{a,\cdot}(t-b)} \right|^p db \right)^{1/p} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi_{a,\cdot}(t-b)} \right|^p db \right)^{1/p} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left((-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi_{a,\cdot}(t-b)} \right|^p dt \right)^{1/p} dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.1 di atas merupakan sifat khusus dari transformasi wavelet dengan dilasi vektor $W_\psi f$. Terlihat bahwa faktor translasi b merupakan variabel yang dikenai operator integral pada sifat-sifat pada Lemma 4.1.1 di atas, sedangkan faktor translasi a hanya bertindak sebagai konstanta.

Lemma 4.1.1 dan (4.2) di atas menunjukkan keterkaitan antara fugnsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan dilasi vektor, yaitu $W_\psi f$ dengan ruang dari fungsi asalnya, yaitu ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pada (4.2) menunjukkan bahwa fungsi hasil transformasi wavelet dengan dilasi vektor $W_\psi f$ berada di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, sedangkan pada Lemma 4.1.1 a) menyatakan bahwa hasil kali fungsi dengan waveletnya yg telah mengalami translasi dan dilasi sebelum konvolusi atau integral juga berada dalam ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$. Untuk Lemma 4.1.1 b) menunjukkan keterkaitan antara fungsi hasil transformasi wavelet dengan dilasi vektor $W_\psi f$ dengan ruang fungsi konjuget dari fungsi asal, yaitu ruang $L^q(\mathbb{R}^n)$, dengan fungsi hasil transformasi $W_\psi f$ berada dalam ruang $L^q(\mathbb{R}^n)$ jika fungsi hasil transformasi $W_\psi f$ dipangkatkan sebesar $p-1$. Sedangkan Lemma 4.1.1 c) dapat dikatakan sebagai kelanjutan dari Lemma 4.1.1 a), jika dalam Lemma 4.1.1 a) ditunjukkan bahwa perkalian fungsi dengan wavelet berada dalam $L^p(\mathbb{R}^n)$, maka dalam lema 4.1.1 c) ditunjukkan bahwa norma dalam $L^p(\mathbb{R}^n)$ dari perkalian fungsi dengan waveletnya berada dalam $L^p(\mathbb{R}^n)$ atau terintegral.

Berdasarkan Lemma 4.1.1 di atas, dapat dibentuk suatu lemma lain yang memberikan suatu ketaksamaan pada transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor yang nantinya berguna untuk membuktikan bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Lemma 4.1.2. *Diberikan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ψ wavelet, $a \in \mathbb{R}^n_+$ dan $W\psi f$ adalah transformasi wavelet dari f. Misalkan q adalah konjuget eksponen dari p, maka*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a,\cdot) \right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)} \right\|_{L^p} dt$$

Bukti. Diberikan $p \in \mathbb{N}$ dan q adalah konjuget eksponen dari p dengan $1 \leq q \leq \infty$, ini artinya

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

maka

$$\frac{p}{q} = p - 1,$$

selanjutnya dengan menggunakan ketaksamaan Holder yang berlaku pada Lemma 4.1.1 (a) dan (b) serta dari teorema Fubini, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|W_\psi f(a,\cdot)\|^p_{L^p} &= \left\| \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} dt \right\|^p_{L^p} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)} dt \right\|^p_{L^p} \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^p}^p = \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^p db\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^p db$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^{p-1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right| db$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}|dt\ db$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^{p-1}|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}|dt\right) db$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^{p-1}|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}|db\right) dt$$

(teorema Fubini)

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}|\ db\ \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt\right|^{p-1}\right) dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left\|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}\right\|_{L^p}\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt\right)^{p-1}\right\|_{L^q} dt$$

(Ketaksamaan Holder)

$$= \left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt\right)^{p-1}\right\|_{L^q}\int_{\mathbb{R}^n}\left\|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}\right\|_{L^p} dt \tag{4.3}$$

ruas kanan ketaksamaan (4.3) di atas adalah berhingga sebab dari Lemma 4.1.1 (b) nilai $\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt\right)^{p-1}\right\|_{L^q}$ adalah berhingga dan dari Lemma 4.1.1 (c) nilai $\int_{\mathbb{R}^n}\left\|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}\right\|_{L^p} dt$ juga berhingga. Berikutnya asumsikan nilai dari $\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt\right)^{p-1}\right\|_{L^q} \neq 0$, lalu bagi kedua ruas dengan $\left\|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt\right)^{p-1}\right\|_{L^q}$ maka ruas kanan ketaksamaan (4.3) di atas menjadi

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left\|f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}\right\|_{L^p} dt$$

sedangkan ruas kiri ketaksamaan (4.3) menjadi

$$
\begin{aligned}
&\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^p}^p \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt \right)^{p-1} \right\|_{L^q}^{-1} = \\
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt \right\|_{L^p}^p \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)}dt \right)^{p-1} \right\|_{L^q}^{-1} = \\
&\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^p db \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^{(p-1)q} db \right)^{-\frac{1}{q}} = \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^p db \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^p db \right)^{-\frac{1}{q}} = \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^p db \right)^{1-\frac{1}{q}} = \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right|^p db \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-b)}dt \right\|_{L^p} = \\
&\left\| \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a,\cdot) \right\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

akibatnya ketaksamaan (4.3) menjadi

$$\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t)\overline{\psi_{a,-}(t-\cdot)} \right\|_{L^p} dt$$

□

Dengan menggunakan sifat ketaksamaan pada Lemma 4.1.2 di atas dapat dibentuk teorema yang menyatakan bahwa transformasi kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan transformasi linear terbatas, dengan kata lain, dibentuk teorema yang menunjukkan terdapat konstanta real positif M sedemikian hingga transformasi linear terbatas $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{\infty p}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n)$ memenuhi

$$\|T(f)\|_{L^{\infty p}} \leq M \|f\|_{L^p}$$

Teorema 4.1.1. *Transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $\rho = 1$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n)$ dengan memenuhi*

$$\|W_\psi f(a,\cdot)\|_{L^{\infty p}} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$

Bukti. Diberikan $a = (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$, $t = (t_i)_{i=1}^n$, $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, dan $\rho > 0$, selanjutnya, misalkan $\frac{t_i - b_i}{a_i} = z_i$, maka $t_i = z_i a_i + b_i$, dengan teknik integral substitusi diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a_i^\rho} f(t_1, \cdots, t_n) \overline{\psi \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n} \right)} \right|^p db_i \right)^{1/p} dt_i =$$

$$\frac{a_i}{a_i^\rho} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f(z_1 a_1 + b_1, \cdots, z_n a_n + b_n) \overline{\psi (z_1, \cdots, z_n)} \right|^p db_i \right)^{1/p} dz_i =$$

$$\frac{1}{a_i^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \overline{\psi (z_1, \cdots, z_n)} \right| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z_1 a_1 + b_1, \cdots, z_n a_n + b_n)|^p db_i \right)^{1/p} dz_i$$

akibatnya, dengan menerapkan teorema Fubini, didapat

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t) \overline{\psi_{a,-}(t - \cdot)} \right\|_{L^p} dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho} f(t) \overline{\psi \left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i} \right)_{i=1}^n \right)} \right|^p db \right)^{1/p} dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^\rho} f(t_1, \cdots, t_n) \overline{\psi \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n} \right)} \right|^p db \right)^{1/p} dt =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n a_i^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi (z_1, \cdots, z_n)} \right| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z_1 a_1 + b_1, \cdots, z_n a_n + b_n)|^p db \right)^{1/p} dz =$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi (z_1, \cdots, z_n)} \right| dz \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z_1 a_1 + b_1, \cdots, z_n a_n + b_n)|^p db \right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \overline{\psi (z)} \right| dz \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f \left(\sum_{i=1}^n z_i a_i + b_i \right) \right|^p db \right)^{1/p} =$$

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^{\rho-1}} \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

dengan demikian, dari Lemma 4.1.2 diperoleh

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a, \cdot) \right\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\| f(t) \overline{\psi_{a,-}(t - \cdot)} \right\|_{L^p} dt \\ &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^{\rho-1}} \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

maka untuk $\rho = 1$ berlaku

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a, \cdot) \right\|_{L^p} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

dengan demikian

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n_+}\left\|\int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a,\cdot)\right\|_{L^p} \leq \|\psi\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

Jadi

$$\|W_\psi f(\cdot,\cdot)\|_{L^{\infty p}} \leq \|\psi\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

karena

$$T(f) = W_\psi f(a,\cdot)$$

maka didapat

$$\|T(f)\|_{L^{\infty p}} \leq \|\psi\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

Ini artinya transformasi wavelet kontinu $W_\psi f$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n)$, sebab terdapat konstanta $M>0$ dengan $M=\|\psi\|_{L^1}$ sedemikian hingga

$$\|T(f)\|_{L^{\infty p}} \leq M\|f\|_{L^p}.$$

$\square$

Teorema di atas menyatakan bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n)$. Ini secara tidak langsung telah membuktikan asumsi sebelumnya bahwa fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan dilasi vektor dari fungsi $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $W_\psi f$ merupakan elemen di ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n)$. Hal ini merupakan perumuman dari hasil yang diperoleh Grossman yang menyatakan bahwa transformasi wavelet satu variabel dari fungsi $f\in L^p(\mathbb{R})$ merupakan transformasi linier terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R})$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R})\times L^p(\mathbb{R})$.

4.2 Kontinuitas Fungsi Hasil Transformasi Wavelet $W_\psi f$

Pada bagian ini diberikan syarat agar fungsi hasil transformasi wavelet pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n$, akan tetapi terlebih dahulu perlu diberikan lemma-lemma yang berguna untuk membantu pembentukan teorema beserta pembuktiannya sebagai berikut.

Lemma 4.2.1. *Jika $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ maka $\psi_{a,b} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ untuk $a \in \mathbb{R}^n_+$ dan $b \in \mathbb{R}^n$.*

Bukti. Diberikan $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, ini berarti ψ kontinu dan bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^n$. Terlebih dahulu akan ditunjukkan $\psi_{a,b}$ kontinu. Jelas bahwa $\psi_{a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dan berbentuk

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right), \; \forall t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

dengan $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\rho > 0$ adalah tetap. Selanjutnya, untuk $i = 1, 2, ..., n$, didefinisikan fungsi $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$r_i(t_i) = \frac{t_i - b_i}{a_i}, \; \forall t_i \in \mathbb{R}$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}_+$, $b_i \in \mathbb{R}$ adalah konstanta. Jelas r_i adalah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sebab r_i fungsi linier. Dilain pihak pandang fungsi $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} r(t) &= (r_1(t_1), r_2(t_2), \cdots, r_n(t_n)) \\ &= \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, ..., \frac{t_n - b_n}{a_n}\right), \; \forall t \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Karena r_i kontinu pada $\mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, maka r kontinu pada $\mathbb{R}^n$. Berikutnya, pandang fungsi komposisi $\psi \circ r$ yang berbentuk

$$\begin{aligned} (\psi \circ r)(t) &= \psi(r(t)) \\ &= \psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, ..., \frac{t_n - b_n}{a_n}\right) \\ &= \psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right), \; \forall t \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.5}$$

karena wavelet ψ kontinu pada $\mathbb{R}^n$ dan r kontinu pada $\mathbb{R}^n$, maka dari sifat fungsi komposisi, diperoleh $\psi \circ r$ kontinu pada $\mathbb{R}^n$. Sementara itu, dari persamaan (4.4) dan (4.5) diperloeh

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}(\psi \circ r)(t), \; \forall t \in \mathbb{R}^n$$

ini berarti $\psi_{a,b} = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\psi \circ r$. Dengan demikian, $\psi_{a,b}$ kontinu pada $\mathbb{R}^n$.

Berikutnya akan ditunjukkan $\psi_{a,b}$ bertumpuan kompak. Diberikan himpunan

$A \subseteq \mathbb{R}^n_+$ sedemikian hingga untuk setiap $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in A$ berlaku

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)$$
$$\neq 0.$$

Ini berarti tumpuan dari $\psi_{a,b}$ adalah A. Telah diketahui $\psi_{a,b} = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \psi \circ r$. Misalkan dalam hal ini domain dari fungsi r dibatasi hanya pada $A \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Karena ψ bertumpuan kompak, maka dari definisi fungsi $\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \psi \circ r$ di atas, didapat range dari r yaitu $r(A)$ adalah himpunan kompak. Di lain pihak jelas bahwaa r adalah fungsi injektif (sebab r fungsi linier), maka r mempunyai invers, dengan demikian, dari sifat himpunan kompak, diperoleh $r^{-1}(A) = A$ adalah kompak. Ini artinya tumpuan dari $\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \psi \circ r$, yaitu A adalah kompak. Mengingat bahwa $\psi_{a,b} = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \psi \circ r$, maka tumpuan dari $\psi_{a,b}$ adalah kompak.

Jadi $\psi_{a,b}$ kontinu dan bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^n$, dengan kata lain $\psi_{a,b} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Lemma 4.2.1 di atas menunjukkan bahwa kekontinuan dan tumpuan kompak dari fungsi wavelet berakibat kekontinuan dan tumpuan kompak pada fungsi wavelet setelah mengalami translasi dan dilasi. Dengan kata lain, translasi dan dilasi pada wavelet tidak merubah kekontinuan dan tumpuan kompak dari wavelet tersebut, jika wavelet tersebut kontinu dan bertumpuan kompak.

Selanjutnya, teorema di bawah ini menyatakan bahwa transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ yaitu $W_\psi f$, bersifat kontinu terhadap faktor translasinya jika wavelet yang bersesuaian merupakan fungsi kontinu bertumpuan kompak. Kekontinuan yang dimaksud adalah kekontinuan atas norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan pada domain fungsinya, yaitu $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.2.2. *Jika wavelet* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $h_b = (h_{b_1}, \cdots, h_{b_n}) \in \mathbb{R}^n$ *maka*

$$\lim_{|h_b| \to 0} \left\| \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} - \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} \right\|_{L^q}$$
$$= 0$$

untuk $1 \leq q \leq \infty$, *dengan* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *dan* $\rho > 0$ *adalah tetap.*

Bukti. Jelas bahwa

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} = \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i + (-h_{b_i}) - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)}$$

Diberikan $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, maka dari Lemma 4.2.1, $\psi_{a,b} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Sedangkan $C_0(\mathbb{R}^n)$ padat di $L^q(\mathbb{R}^n)$, sehingga $C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$, akibatnya $\psi_{a,b} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ maka dari definisi fungsi $\psi_{a,b}$ dan dari teorema kekontinuan operator translasi berlaku

$$\lim_{|h_b| \to 0} \left\| \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} - \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \right\|_{L^q}$$
$$= 0$$

untuk $1 \leq q < \infty$. Disisi lain, karena ψ kontinu, maka

$$\lim_{|h_b| \to 0} \left| \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} - \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \right|_{L^q}$$
$$= 0$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{|h_b| \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} - \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \right|_{L^q}$$
$$= 0$$

ini artinya

$$\lim_{|h_b| \to 0} \left\| \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - (b_i + h_{b_i})}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} - \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{\cdot - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \right\|_{L^q}$$
$$= 0$$

untuk $q = \infty$. $\square$

Lemma di atas mirip dengan Teorema Kekontinuan Operator Translasi pada fungsi di ruang $L^p(\mathbb{R}^n$, hanya saja perbedaannya, pada lemma di atas nilai q memenuhi $1 \leq q \leq \infty$, sedangkan pada teorema kekontinuan operator translasi nilai q hanya memenuhi $1 \leq q < \infty$.

Di bawah ini diberikan lemma yang menunjukkan bahwa fungsi wavelet bersifat kontinu terhadap faktor dilasinya.

Lemma 4.2.3. *Didefinisikan fungsi $G : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ dengan*

$$G(a) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \quad \forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

dengan $t = (t_1, \cdots, t_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\rho > 0$ adalah tetap. Jika wavelet ψ kontinu pada $\mathbb{R}^n$ maka G kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$.

Bukti. Diberikan ψ kontinu pada $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya, Untuk $i = 1, 2, ..., n$, didefinisikan fungsi $v_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dengan

$$v_i = \frac{t_i - b_i}{a_i}, \ \forall a_i \in \mathbb{R}_+$$

dengan $t_i, b_i \in \mathbb{R}$ adalah tetap. Jelas v_i adalah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+$ untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, sebab v_i fungsi rasional. Dilain pihak pandang fungsi $v : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} v(a) &= (v_1(a_1), v_2(a_2), ..., v_n(a_n)) \\ &= \left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, ..., \frac{t_n - b_n}{a_n}\right), \ \forall a \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \tag{4.6}$$

dengan $t, b \in \mathbb{R}^n$ adalah tetap. Karena v_i kontinu pada $\mathbb{R}_+$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, maka v kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$. Selanjutnya, karena wavelet ψ kontinu pada $\mathbb{R}^n$, maka ψ juga kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$, dengan demikian, jika diberikan fungsi komposisi $\overline{\psi} \circ v$ yang berbentuk

$$\begin{aligned} (\overline{\psi} \circ v)(a) &= \overline{\psi(r(a))} \\ &= \overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} \\ &= \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

maka $\overline{\psi} \circ v$ kontinu pada setiap $a \in \mathbb{R}_+^n$. Sementara itu, jelas fungsi rasional $p : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ yang berbentuk

$$p(a) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\rho}}, \forall a \in \mathbb{R}_+^n$$

adalah kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$. Dengan demikian, dari persamaan (4.6) dan (4.7) fungsi G berbentuk

$$\begin{aligned} G(a) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} \\ &= p(\bar{\psi} \circ v)(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

Terlihat bahwa G adalah komposisi dari fungsi-fungsi kontinu, akibatnya G kontinu disetiap titik $\forall a \in \mathbb{R}_+^n$. Jadi G kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$. □

Dari Lemma 4.2.2 dan Lemma 4.2.3 di atas, dapat dikatakan bahwa fungsi wavelet ψ bersifat kontinu terhadap faktor translasi dan dilasinya, jika wavelet ψ merupakan fungsi kontinu dan bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^n$. Perbedaan dengan Lemma 4.2.1, jika pada Lemma 4.2.1 wavelet ψ yang telah dikenai translasi dan dilasi, yaitu $\psi_{a,b}$ bersifat kontinu pada $\mathbb{R}^n$, maka pada Lemma 4.2.2 dan Lemma 4.2.3 wavelet ψ kontinu pada $\mathbb{R}^n$ terhadap faktor translasi dan dilasinya. Tenu saja dengan syarat cukup yang diberikan, yaitu wavelet ψ harus kontinu dan bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^n$.

Selanjutnya, lemma di bawah ini merupakan akibat dari Lemma 4.2.3.

Lemma 4.2.4. *Jika wavelet $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $h_a = (h_{a_1}, \cdots, h_{a_n}) \in \mathbb{R}_+^n$ maka*

$$\lim_{|h_a| \to 0} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n (a_i + h_{a_i})\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{(a_i + h_{a_i})}\right)_{i=1}^n\right)} = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)}$$

$t \in \mathbb{R}^n$ dengan $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\rho > 0$ adalah tetap.

Bukti. Diberikan $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Tinjau kembali fungsi G pada Lemma 4.2.3, maka fungsi G dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} G(a) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^\rho} \overline{\psi\left(\frac{t_1 - b_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_2}{a_2}, \cdots, \frac{t_n - b_n}{a_n}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

Karena G kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$ (dari Lemma 4.2.3), maka

$$\begin{aligned} &\lim_{|h_a| \to 0} \left| \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n (a_i + h_{a_i})\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{(a_i + h_{a_i})}\right)_{i=1}^n\right)} - \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^\rho} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)} \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

akibatnya

$$\lim_{|h_a|\to 0} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+h_{a_i})\right)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i-b_i}{(a_i+h_{a_i})}\right)_{i=1}^{n}\right)} = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i-b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)}$$

□

Berdasarkan Lemma 4.2.1 sampai Lemma 4.2.4 sebelumnya, maka dibentuk teorema yang memberikan syarat cukup agar fungsi hasil transformasi wavelet dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$.

Perhatikan kembali $h_a = (h_{a_1}, \cdots, h_{a_n}) \in \mathbb{R}^n_+$ dan $h_b = (h_{b_1}, \cdots, h_{b_n}) \in \mathbb{R}^n$. Diberikan $h \in \mathbb{R}^{2n}$ dengan $h = (h_{a_1}, \cdots, h_{a_n}, h_{b_1}, \cdots, h_{b_n})$. Selanjutnya, misalkan H adalah fungsi sedemikian hingga

$$H(a,b,t) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\rho}} \overline{\psi\left(\left(\frac{t_i-b_i}{a_i}\right)_{i=1}^{n}\right)}$$

dengan demikian dari Lemma 4.2.2 dan Lemma 4.2.4 masing-masing berlaku

$$\lim_{|h_b|\to 0} \|H(a,b+h_b,\cdot)\|_{L^q} = H(a,b,\cdot) \text{ dan } \lim_{|h_a|\to 0} |H(a+h_a,b,\cdot)| = H(a,b,\cdot)$$

ini berarti, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta_b > 0$ dan $\delta_a > 0$ sedemikian hingga

$$\|H(a,b+h_b,\cdot) - H(a,b,\cdot)\|_{L^q} < \varepsilon, \text{ jika } |h_b| < \delta_b.$$

dan

$$|H(a+h_a,b,\cdot) - H(a,b,\cdot)| < \varepsilon, \text{ jika } |h_a| < \delta_a.$$

Disisi lain, telah diketahui $h = (h_{a_1}, \cdots, h_{a_n}, h_{b_1}, \cdots, h_{b_n})$, maka diperoleh

$$|h| < (\delta_a + \delta_b)^{1/2}.$$

Ini artinya, untuk $|h| \to 0$ berlaku

$$\|H(a,b+h_b,\cdot) - H(a,b,\cdot)\|_{L^q} = 0, \text{ dan } |H(a+h_a,b,\cdot) - H(a,b,\cdot)| = 0$$

tanpa mengurangi keumuman maka juga berlaku

$$\|H(a+h_a,b+h_b,\cdot) - H(a+h_a,b,\cdot)\|_{L^q} = 0$$

Dengan demikian dari ketaksamaan Holder diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)H(a+h_a, b+h_b, t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(t)H(a,b,t)dt\right| \\
&\leq \|f\|_{L^p} \|H(a+h_a, b+h_b, \cdot) - H(a,b,\cdot)\|_{L^q} \\
&= 0
\end{aligned}$$

untuk $|h| \to 0$. Hasil tersebut membawa pada teorema berikut.

Teorema 4.2.1. *Diberikan ψ adalah wavelet. Jika wavelet $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, maka fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor, yaitu $W_\psi f$, merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$.*

Bukti. Diberikan $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, maka jelas $\psi_{a,b} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, akibatnya $\psi_{a,b} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ sebab $C_0(\mathbb{R}^n)$ padat di $L^q(\mathbb{R}^n)$. Berikutnya, misalkan

$$H(a,b,t) = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)}$$

maka transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dapat ditulis

$$\begin{aligned}
W_\psi f(a,b) &= \frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^\rho}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\left(\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)_{i=1}^n\right)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)H(a,b,t)dt
\end{aligned}$$

Dengan demikian, dari ketaksamaan Holder diperoleh

$$\begin{aligned}
&|W_\psi f(a+h_a, b+h_b) - W_\psi f(a,b)| = \\
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)H(a+h_a, b+h_b, t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(t)H(a,b,t)dt\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)H(a+h_a, b+h_b, t) - f(t)H(a,b,t)|\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, |H(a+h_a, b+h_b, t) - H(a,b,t)|\, dt \\
&\leq \|f\|_{L^p} \|H(a+h_a, b+h_b, \cdot) - H(a,b,\cdot)\|_{L^q} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

untuk $1 \leq q \leq \infty$. Selanjutnya, dari ruas kanan pada ketaksamaan (4.8) di atas, dengan menerapkan ketaksamaan segitiga didapat

$$\begin{aligned}
&\|H(a+h_a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q}\\
&=\|H(a+h_a,b+h_b,\cdot)-H(a+h_a,b,\cdot)+H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q}\\
&\leq \|H(a+h_a,b+h_b,\cdot)-H(a+h_a,b,\cdot)\|_{L^q}+\|H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dari ruas kanan ketaksamaan (4.9) di atas. Dari Lemma 4.2.4, untuk $|h_a| \to 0$ maka berlaku

$$\|H(a+h_a,b+h_b,\cdot)-H(a+h_a,b,\cdot)\|_{L^q}=\|H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q} \tag{4.10}$$

Berikutnya dari Lemma 4.2.2, untuk $|h_b| \to 0$, maka pada ketaksamaan (4.9) dan persamaan (4.10) berlaku

$$\|H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q}=0.$$

Dengan demikian untuk $|h| \to 0$ dengan $h=(h_{a_1},\cdots,h_{a_n},h_{b_1},\cdots,h_{b_n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ berlaku

$$\|H(a+h_a,b+h_b,\cdot)-H(a+h_a,b,\cdot)\|_{L^q}=\|H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q} \tag{4.11}$$

dan

$$\|H(a,b+h_b,\cdot)-H(a,b,\cdot)\|_{L^q}=0. \tag{4.12}$$

akibatnya dari persamaan (4.11) dan (4.12) ruas kanan pada ketaksamaan (4.9) menjadi nol. Dengan demikian dari ketaksamaan (4.8) berlaku

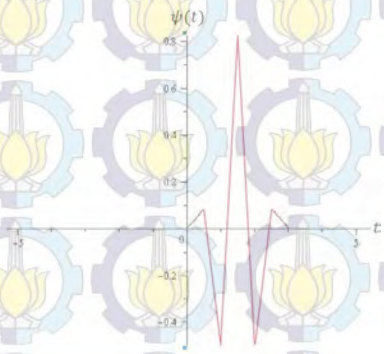
$$\lim_{|h|\to 0}|W_\psi f(a+h_a,b+h_b)-W_\psi f(a,b)|=0$$

Ini artinya fungsi hasil transformasi wavelet dengan dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu W_ψ, kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 4.2.1 di atas menyatakan bahwa syarat cukup sehingga fungsi transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$ adalah wavelet ψ merupakan fungsi kontinu bertumpuan kompak pada domain $\mathbb{R}^n$. Salah satu contoh wavelet satu variabel yang kontinu dan bertumpuan kompak adalah wavelet Daubechies dan wavelet yang diperoleh dari fungsi skala B-Spline dengan order lebih dari satu atau wavelet B-Spline dengan order lebih dari 1 , misalnya saja wavelet B-Spline order-2 yang berbentuk

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t & \text{untuk } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -\frac{7}{6}t + \frac{2}{3} & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{8}{3}t - \frac{19}{6} & \text{untuk } 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ -\frac{8}{3}t + \frac{29}{6} & \text{untuk } \frac{3}{2} \leq t < 2 \\ \frac{7}{6}t - \frac{17}{6} & \text{untuk } 2 \leq t < \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{6}t + \frac{1}{2} & \text{untuk } \frac{5}{2} \leq t < 3 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

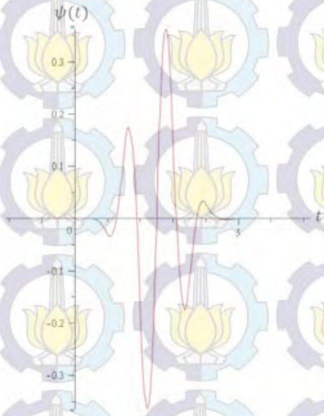
atau wavelet B-Spline order-3 yang berbentuk



Gambar 4.1: Grafik B-Spline Order-2

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{240}t^2 & \text{untuk } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -\frac{31}{240}t^2 + \frac{2}{15}t - \frac{1}{30} & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{103}{120}t^2 - \frac{221}{220}t + \frac{229}{240} & \text{untuk } 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ -\frac{313}{120}t^2 + \frac{1027}{120}t - \frac{1643}{240} & \text{untuk } \frac{3}{2} \leq t < 2 \\ \frac{22}{5}t^2 - \frac{779}{40}t + \frac{339}{16} & \text{untuk } 2 \leq t < \frac{5}{2} \\ -\frac{22}{5}t^2 + \frac{981}{40}t - \frac{541}{16} & \text{untuk } \frac{5}{2} \leq t < 3 \\ \frac{313}{120}t^2 - \frac{701}{40}t + \frac{2341}{80} & \text{untuk } 3 \leq t < \frac{7}{2} \\ -\frac{103}{120}t^2 + \frac{809}{120}t - \frac{3169}{240} & \text{untuk } \frac{7}{2} \leq t < 4 \\ \frac{31}{240}t^2 - \frac{139}{120}t + \frac{623}{240} & \text{untuk } 4 \leq t < \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{240}t^2 + \frac{1}{24}t - \frac{5}{48} & \text{untuk } \frac{9}{2} \leq t < 5 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Sedangkan contoh wavelet kontinu bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^2$ adalah wavelet



Gambar 4.2: Grafik B-Spline Order-3

B-Spline order lebih dari pada $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$\psi(t) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$$

dengan $\psi_i(t_i)$ adalah wavelet B-Spline di $\mathbb{R}$.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan. Selain itu, diberikan saran untuk penelitian selanjutnya

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah transformasi linear terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{\infty p}(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n)$ untuk $\rho = 1$ dengan konstanta $M = \|\psi\|_{L^1}$.

2. Syarat cukup fungsi hasil transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$ adalah wavelet ψ merupakan fungsi kontinu bertumpuan kompak pada $\mathbb{R}^n$.

5.2 Saran

Saran yang diberikan untuk penelitian berikutnya khususnya yang berkaitan dengan transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor antara lain:

1. Pada penelitian berikutnya dapat diteliti tentang invers transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2. Pada penelitian berikutnya dapat diteliti mengenai terapan dari transformasi wavelet kontinu dengan faktor dilasi vektor pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DAFTAR PUSTAKA

Apostol, J.R.L, (1996), *Calculus Volume 2*, John Wiley and Sons, Inc.

Ashino, R. (2002), *Some Topics On Wavelets*, Divison Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University, Kashiwara, Osaka, 582-8582, Japan.

Navarro, J., and Herrera, O. (2012). ”Convergence of Discrete Wavelet Transform”, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, World Scientific Publishing Company, Vol.10, No.6.

Bartle, R.G., (1992), *The Element of Integration and Lebesgue Measure.*, John Wiley and Sons, Inc.

Chui, C.K. (1992), *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Inc., Boston, MA.

Daubechies, I. (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Pennsylvania.

Grossman, A., and Morlet, J. (1984). ”Decomposition of Hardy Function Into Square Integrable Wavelets of Constant Shape ”, SIAM Journal Mathematical Analysis, Vol.15, (page 723-736).

Gunawan, H. (2014), *Catatan Kuliah Analisis Fourier dan Wavelet*, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, KK Analisis dan Geometri, Institut Teknologi Bandung, Bandung.

Jones, F., (1993), *Lebesgue Integration On Euclidean Space*, John Wiley and Sons, Inc.

Koornwinder, T. H. (1993.), *Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications*, World Scientific,.

Pathak, R.S., (2009), *The Wavelet Transform.*, Atlantis Press/World Scientific, Paris.

Pathak, R.S., (2004). ”The Wavelet Transform of Distributions”, Tohoku Math. Journal, Vol.56, (page 411-421).

Pathak, R.S., (1998). ”Continuity and inversion of the wavelet transform”, Integral Transforms and Special Functions, Taylor and Francis Online, Vol.6, (issue 1-4).

Webb, J.R.L, (1991), *Functions of Several Variables*, Ellis Horwood in Mathematics and its Applications.

Yunus, M. (2005), *Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional*, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Rizky Darmawan, lahir di Sidoarjo, tanggal 7 Februari 1990. Penulis menempuh pendidikan sekolah formal dimulai di SD Negeri Banyu Urip III Surabaya (lulus tahun 2002), lalu melanjutkan di SMP Negeri 10 Surabaya (lulus tahun 2015), dan terakhir melanjutkan di SMA Negeri 6 Surabaya (lulus tahun 2008). Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan kuliah S1 pada tahun 2008 lewat jalur SNMPTN 2008 dan diterima di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, mengambil jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, lulus pada tahun 2013. Selama menempuh pendidikan S1, penulis mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar. Setelah menyelesaikan studi S1, pada tahun 2013, penulis melanjutkan kuliah S2 di Jurusan yang sama, Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, lewat program beasiswa *fresh graduate* dari Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Selama menempuh pendidikan S2, penulis mengambil bidang minat Analisis Terapan. Untuk menjalin jejaring informasi yang berhubungan dengan Tesis ini, dapat ditujukan ke alamat e-mail: darmawan.rizky13@mhs.matematika.its.ac.id